Décomposition de Bruhat

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note T_s l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(\mathbb{R})$ et si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est une permutation on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(i)})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de permutation associée à σ. On a alors la décomposition suivante :

$$GL_n(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} T_s P_\sigma T_s.$$

Preuve du théorème : On va traduire les opérations élémentaires sur les matrices en terme de multiplication matricielle.

- Si $\alpha \neq 0$ on note $D_i(\alpha)$ la matrice de dilatation $I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$. On peut alors voir que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, multiplier par M par $D_i(\alpha)$ à gauche (resp. à droite) revient à multiplier la ligne i (resp. la colonne i) par α.
- Si $\lambda \neq 0$ et $i < j$, on note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice de transvection $I_n + \lambda E_{i,j}$. On peut alors voir que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, multiplier par M par $T_{i,j}(\lambda)$ à gauche (resp. à droite) revient à faire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp.$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$).

On voit aisément qu'une matrice d'un de ces deux types est triangulaires supérieur. Ainsi, tout produit de telles matrices est aussi triangulaire supérieur.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On va, par "récurrence", se ramener à une matrice de permutation avec des opérations élémentaires.

Comme A est inversible sa première colonne est non nulle et cela fait alors sens de définir

$$i_1 = \max\{1 \leq i \leq n : a_{i,1} \neq 0\}.$$

On peut alors multiplier la $i_1$ème ligne par $\dfrac{1}{a_{i_1,1}}$ pour normaliser le coefficient en position $a_{i_1,1}$ (cela revient à multiplier A par $D_{i_1}\left(\dfrac{1}{a_{i_1,1}}\right)$ par la gauche). Ensuite pour tout $i < i_1$ on soustrait $a_{i,1}L_{i_1}$ à L_i pour avoir des 0 sur le reste de la colonne (cela revient à multiplier successivement A par $T_{i,i_1}(-a_{i,1})$ à gauche). Pour l'instant ce que nous venons de décrire est synthétisé de la manière suivante

$$T_{1,i_1}(-a_{1,1})...T_{i_1-1,i_1}(-a_{i_1-1,1})D_{i_1}\left(\frac{1}{a_{i_1,1}}\right)A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 1 & (*) & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Pour finir cette première étape on va, pour tout $2 \leq j \leq n$, soustraire $a_{i_1,j}C_1$ à C_j (donc en multipliant A par $T_{1,j}(-a_{i_1,j})$ par la droite), de sorte à avoir

$$T_{1,i_1}(-a_{1,1})...T_{i_1-1,i_1}(-a_{i_1-1,1})D_{i_1}\left(\frac{1}{a_{i_1,1}}\right)AT_{1,j}(-a_{i_1,j}) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & (*) & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & (*) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

En faisant la méthode pour la deuxième colonne on peut se ramener, à l'aide d'opérations élémentaires, à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (*) & \\ \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (*) & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

En itérant le procédé on trouve qu'il existe une matrice T_1, une matrice T_2, toutes deux triangulaires supérieures, et une permutation σ telles que $T_1AT_2 = P_\sigma$. Ainsi, $A = T_1^{-1}P_\sigma T_2^{-1}$ et on a bien la décomposition comme voulue. Intéressons-nous maintenant à l'unicité de la permutation σ pour une telle décomposition.

Soit σ, σ' deux permutations et $T_1, T_2, T_1', T_2' \in T_s$ telles que $A = T_1P_\sigma T_2 = T_1'P_{\sigma'}T_2'$. En posant $T = T_1'^{-1}T_1$ et $T' = T_2'T_2^{-1}$ on a $TP_\sigma = P_{\sigma'}T'$.
On remarque que TP_σ correspond à T après avoir fait $C_j \leftarrow C_{\sigma(j)}$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et $P_{\sigma'}T'$ correspond à T' après avoir fait $L_i \leftarrow L_{\sigma^{-1}(i)}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi, si $i > \sigma(j)$, $(TP_\sigma)_{i,j}$ est nul (car T est triangulaire supérieur). De plus, $(P_{\sigma'}T')_{\sigma'(j),j} = T'_{j,j} \neq 0$ car T' est triangulaire supérieur inversible. Ainsi, $\sigma'(j) \leq \sigma(j)$. Par symétrie, $\sigma(j) = \sigma'(j)$ pour tout j d'où $\sigma = \sigma'$. $\square$

Remarques :

- Attention à ce que j'ai écrit, c'est facile de se prendre les pieds dans le tapis avec ce développement.